සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது)
All Rights Reserved]

16291

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1996 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1996 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1996

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
Applied Mathematics I

02
S | I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C යන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ වෙයි. මෙහි α, β යනු අදිශ යි. $\alpha + \beta = 1$ **ම නම් පමණක්** A, B හා C ඒකරේඛීය බව සාධනය කරන්න.

   PQR සහ LMN ත්‍රිකෝණ දෙක කෙසේ ද යත් PL, QM හා RN රේඛා O ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ඒකලක්ෂ්‍ය වන පරිදි ය. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P, Q හා R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ හා $\mathbf{r}$ වෙයි. QR රේඛාවත් MN රේඛාවත් A හි දී ද RP රේඛාවත් NL රේඛාවත් B හි දී ද PQ රේඛාවත් LM රේඛාවත් C හි දී ද හමුවෙයි.

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\mu\mathbf{q} - \upsilon\mathbf{r}}{\mu - \upsilon}, \qquad \overrightarrow{OB} = \frac{\upsilon\mathbf{r} - \lambda\mathbf{p}}{\upsilon - \lambda}, \qquad \overrightarrow{OC} = \frac{\lambda\mathbf{p} - \mu\mathbf{q}}{\lambda - \mu}$$

   වන පරිදි λ, μ හා υ යන ප්‍රභින්න අදිශ තුනක් පවතින බව පෙන්වන්න.

   A, B හා C ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කරන්න.

2. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකක $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.
   (අ) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ අතර කෝණය සොයන්න :
      (i) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}) = 0$ සහ $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$
      (ii) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

   (ආ) A, B, C, D යනු චතුස්තලයක ශීර්ෂ ද O යනු BCD ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය ද වෙයි. BC ට AD ලම්බ ද CD ට AB ලම්බ ද නම් මූල ලක්ෂ්‍යය ලෙස O ගැනීමෙන් හා අදිශ ගුණිත භාවිත කර
      (i) BCD මුහුණතට OA ලම්බ බවත්
      (ii) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ බවත්
   පෙන්වන්න.

3. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකක $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.
   (අ) පහත සඳහන් ඒවා අගයන්න :
      (i) $$\frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2}$$
      (ii) $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]$

   (ආ) $Oxyz$ යනු සුරත් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතියකි; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy, Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික යි. O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{p} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{q} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ වෙයි.

   $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR}$ නම් $|\mathbf{r}|$ සොයන්න. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි S ලක්ෂ්‍යයේ $\mathbf{s}$ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

   $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල සමාන්තර නොවන බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවෙන් තබා ගනියි නම් ඒ බල ලක්ෂ්‍යයෙක දී හමු විය යුතු බව පෙන්වන්න.

W බරින් යුත් AB දණ්ඩක් C ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ බෙදී ලැබෙන්නේ පිළිවෙළින් a හා b දිග ඇති AC හා CB කොටස් දෙකට ය. දණ්ඩ තිරස්ව සමතුලිතතාවෙන් තිබෙන්නේ B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට තේත්තු කර B ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ $l\,(> a + b)$ දිගින් යුත් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් A කෙළවරකට සම්බන්ධ කිරීමෙනි.

(අ) $\cos^2 A\widehat{B}D = \dfrac{a^2}{b\,(b + 2a)} \left[\dfrac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right]$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

5. ABC යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි; ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද අරය R ද වෙයි. පිළිවෙළින් BC, OA, CA, OB, AB හා OC දිගා ඔස්සේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන අතට ක්‍රියා කරන $L, L;\ M, M;\ N, N$ විශාලත්වයෙන් යුත් බල හයකින් ද ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි ACB අතට ක්‍රියා කරන ඝූර්ණය $\lambda R\,(L + M + N)$ වූ තිර්-ගුණ්‍ය යුග්මයකින් ද පද්ධතියක් සමන්විත වෙයි.

පද්ධතිය ඌනනය වන්නේ

(අ) තනි බලයකට නම්, $L^2 + M^2 + N^2 > LM + MN + NL$ බවත්

(ආ) තනි යුග්මයකට නම්, $L = M = N$, $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ බවත්

පෙන්වන්න.

මේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවෙන් පැවතීම සඳහා අනිවාර්ය හා ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතා කාණ්ඩයක් සඳහන් කරන්න.

6. එක එකක් $2a$ දිගින් හා W බරින් යුත් සමාන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර තිබෙයි. a දිගින් යුත් බර රහිත BD දණ්ඩ, B හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර AC මත සර්පණය විය හැකි ලුහු සුමට කුඩා මුද්දකට D හි දී සවි කර ඇත. B සහ C දෙකෙළවර සුමට තිරස් තලයක නිශ්චලතාවේ පිහිටන පරිදි පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත. BD දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය

$$\frac{W}{12}\,(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

බව පෙන්වන්න.

A සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව ද එහි ක්‍රියා රේඛාවට CB හමුවන ලක්ෂ්‍යය ද සොයන්න.

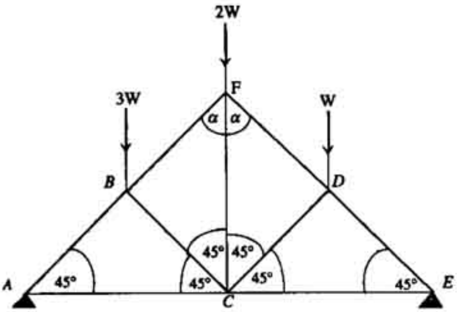
7. (i) උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජුවෘත්ත කේතුවක,

(ii) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඝනත්වය ρ ද ආධාරක අරය a ද උස $4a$ ද වූ ඒකාකාර ඝන සෘජුවෘත්ත කේතුවක් සහ ඝනත්වය $\lambda\rho$ ද ආධාරක අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක්, ඒවායේ ආධාරක සම්පාත වන පරිදි එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක ආකාරයේ සෙල්ලම් බඩුවක් තනා තිබෙයි. පොදු ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට සෙල්ලම් බඩුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සෙල්ලම් බඩුව ස්ථායී සමතුලිතතාවේ පැවතිය නොහැකි නම් $\lambda > 20$ බව පෙන්වන්න.

8.



ඉහත රූපයෙන් දක්වෙන්නේ, පෙන්වා ඇති පරිදි B, F හා D සන්ධිවල දී බර යොදා A, B, C, D, E, F හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ යුහු දඬු නවයක රාමු සැකිල්ලකි. AC හා CE තිරස් ය; $AB = BC = CD = DE = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{CE}{\sqrt{2}}$; $BF = FD$. A හා E ආධාරකවල ප්‍රතික්‍රියා සිරස් යැයි උපකල්පනය කර ඒවා සොයන්න.

$\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ විට, බෝ අංකනය යොදා ගෙන ඉහත රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. CD දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය ශූන්‍ය නම් α සොයන්න. ඒ නයින් ඉතිරි දඬු අටේ ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වෙන් වෙන් ව දක්වන්න.

9. (අ) ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක් නිසලව ඇත්තේ එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය, රළු තිරස් තලයක් ද ඒ හා සමාන ලෙස රළු සිරස් බිත්තියක් ද ස්පර්ශ වන පරිද්දෙනි. සිරස සමඟ අර්ධගෝලයේ ආධාරකයට සෑදිය හැකි අඩුතම කෝණය $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$ නම්, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය දෙකේ දීම ඝර්ෂණ කෝණය

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{23}-4}{7}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) W බරින් යුත් අංශුවක්, තිරසට ආනතිය $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ වූ රළු තලයක් මත තිබෙයි. අංශුව යුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් තලයේ වූ ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. θ යනු තන්තුවත් වැඩිතම බෑවුම් රේඛාවත් අතර සුළු කෝණය නම්,

$$\theta \leq \sin^{-1}\left(\frac{\tan \lambda}{\tan \alpha}\right)$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\lambda \, (< \alpha)$ යනු ඝර්ෂණ කෝණයයි.

θ හි විවිධ අගයන් සඳහා තන්තුවේ ආතතියේ අඩුතම අගය ද සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. ABC ත්‍රිකෝණික ආස්තරයක් ඒකාකාර ඝනත්වයක් ඇති ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත්තේ එහි තලය සිරස්ව ද BC පාදය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ ද A ශීර්ෂය BC ට පහළින් ද පිහිටන පරිදි ය. එහි පීඩන කේන්ද්‍රය නිදහස් පෘෂ්ඨයට පහළින් $\frac{h}{2}$ ගැඹුරකින් වන බව පෙන්වන්න. මෙහි h යනු BC හි සිට A ට ඇති දුරයි.

වැංකියක එක් බිත්තියක් පතුළේ සිට ඇතුළතට බෑවුම් වන්නේ සිරසට $\frac{\pi}{3}$ කෝණයකිනි. බර W වූ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක ආකාරයෙන් වන ඒකාකාර උගුල් දොරක් එම බිත්තියේ ඇත. BC තිරස් පාදය වටා සුමට ලෙස අසවු කළ එම දොරේ A ශීර්ෂය BC ට පහළින් පිහිටා ඇති අතර දොර පිටතට විවෘත කළ හැකි ය. වැංකියේ පතුළට ඉහළින් A, B හා C ශීර්ෂවල සිරස් උස පිළිවෙළින් a, b හා b වෙයි. උගුල් දොර, නිදහස් පෘෂ්ඨයට මුළුමනින් ම පහළින් තිබෙන සේ d උසකට වැංකියට ජලය වත් කරනු ලැබෙයි. දොර වැසී පවතියි නම්

$$d \leq \frac{1}{2}\left[a+b+\frac{3W}{4s(b-a)^2}\right]$$

බව සාධනය කරන්න.

මෙහි s යනු ජලය ඒකක පරිමාවක බර යි.

11. දිග h ද අරය a ද වූ ඝන සෘජුවෘත්ත සිලින්ඩරයක්, අක්ෂය හරහා යන තලයක් ඔස්සේ කපා තිබෙයි. සිලින්ඩරයේ එක් අර්ධයක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයක යන්තම් ගිල්වා ඇත්තේ එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය යටිකුරුව ද එහි $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍ර තල ආධාරකය තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනතව ද තිබෙන පරිදි ය.

(අ) h දිගින් යුත් BC දරය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ පිහිටන විට වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුමේ තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙලින් $ha^2\rho g$ හා $\left(1+\frac{\pi}{2}\right) ha^2\rho g$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $2a$ දිගින් යුත් AB දරය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ පිහිටන විට වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම

$$\left(\frac{\pi a^2}{4} + \frac{ah}{2}\right) h\rho g\sqrt{2}$$

බව පෙන්වා, එහි ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයේ එන "ආකිමිඩීස් මූලධර්මය" ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

බර W වූ කුඩා අංශුවක් නොගිණිය හැකි තරම් බරින් යුත් කුහර සෘජුවෘත්ත කේතුවක ශීර්ෂයට ඇද තිබෙයි. කේතුව ජලයේ ඉපිලෙන්නේ ශීර්ෂය යටි අතට ද අක්ෂය සිරස්ව ද නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සිට h ගැඹුරකින් ශීර්ෂය තිබෙන සේ ද පිහිටන පරිද්දෙනි. නිදහස් පෘෂ්ඨයත් කේතුව තුළ ද්‍රව පෘෂ්ඨයත් එකම මට්ටමකට එන තෙක් σ විශිෂ්ට ගුරුත්වය වූ ද්‍රවයක් කේතුව තුළට වත් කරනු ලැබේ. එවිට ශීර්ෂය, නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සිට $2h$ ගැඹුරකින් පිහිටයි නම් $\sigma = \frac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.